3.7.9 Dělení mnohočlenem III

Předpoklady: 030708

Př. 1: Vypočti a proveď zkoušku. a) $(4a^2-9):(2a+3)$ b) $(y^3-1):(y-1)$

a)
$$\begin{array}{l} (4a^2-9):(2a+3)=2a-3 \\ \underline{-(4a^2+6a)} \\ \quad -6a-9 \\ \underline{\quad -(-6a-9)} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Zkouška: $(2a-3)(2a+3)=4a^2+6a-6a-9=4a^2-9$.

b)
$$\begin{array}{l} (y^3-1):(y-1)=y^2+y+1 \\ \underline{-(y^3-y^2)} \\ \qquad y^2-1 \\ \underline{\quad -(y^2-y)} \\ \qquad\quad y-1 \\ \underline{\qquad -(y-1)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Zkouška: $(y^2+y+1)\cdot(y-1)=y^3+y^2+y-y^2-y-1=y^3-1$

Pedagogická poznámka: V následujícím příkladu se poprvé objevuje dělení se zbytkem. Rychlejší část třídy v tom chvíli nechám, ale pak si rychle vysvětlíme, že jde o vcelku očekávatelnou záležitost, která funguje stejně jako zbytek u klasického dělení.

Př. 2: Vyděl a proveď zkoušku. a) $(x^2+2x-1):(x-1)$ b) $(2x-4):(x^2+2x)$

a)
$$\begin{array}{l} (x^2+2x-1):(x-1)=x+3 \\ \underline{-(x^2-x)} \\ \qquad 3x-1 \\ \underline{\quad -(3x-3)} \\ \qquad\quad 2 \end{array}$$

Dvojku už dále nemůžeme dělit (nevíme, jak spočítat $2:(x-1)=\frac{2}{x-1}$), hraje stejnou roli jako zbytek při klasickém dělení $\Rightarrow$ můžeme napsat: $(x^2+2x-1):(x-1)=x+3+\frac{2}{x-1}$

(nevydělený zbytek – číslo 2 píšeme jako čitatel zlomku, aby bylo jasné, že tuto část mnohočlenu ještě musíme vydělit výrazem $x-1$.

Říkáme:

- provedli jsme dělení se zbytkem,

- $\left(x^2+2x-1\right):\left(x-1\right)=x+3 \quad \left(\text{zbytek } 2\right)$,
- zbytkem je jednočlen 2,
- dvojčlen je neúplný podíl.

Zkouška:

$$\left(x-1\right)\cdot\left(x+3+\frac{2}{x-1}\right)=\left(x-1\right)\cdot\left(x+3\right)+\left(x-1\right)\cdot\frac{2}{x-1}=x^2+3x-x-3+2=x^2+2x-1$$

b) $\left(2x-4\right):\left(x^2+2x\right)$ - nejvyšší mocnina dělence je menší než nejvyšší mocnina dělitele $\Rightarrow$ dělitel je „větší“ než dělitel a „nevejde se do něj ani jednou“ $\Rightarrow$ žádné dělení neprovádíme a celý dělenec je zbytek.

$\left(2x-4\right):\left(x^2+2x\right)=0 \quad \left(\text{zbytek } 2x-4\right)$

Př. 3: Vyděl.

a) $\left(a^3-4a^2+a+3\right):\left(a-2\right)$ b) $\left(x^3-2x^2-5\right):\left(x+3\right)$

c) $\left(6x^3-7x^2+5x-2\right):\left(3x-2\right)$ d) $\left(4a^3-a+2\right):\left(a-4\right)$

e) $\left(x^4-2x^2+2\right):\left(x^2-1\right)$ f) $\left(x^4-2x^3+5x^2-4x+6\right):\left(x^2+2\right)$

g) $\left(a^3+b^3\right):\left(a+b\right)$ h) $\left(b^6-1\right):\left(b+1\right)$

a)

$$\begin{array}{l}
\left(a^3-4a^2+a+3\right):\left(a-2\right)=a^2-2a-3 \quad \left(\text{zbytek } -3\right)\\
\underline{-\left(a^3-2a^2\right)}\\
\quad -2a^2+a+3\\
\quad \underline{-\left(-2a^2+4a\right)}\\
\qquad -3a+3\\
\qquad \underline{-\left(-3a+6\right)}\\
\qquad\qquad -3
\end{array}$$

Zkouška: $\left(a-2\right)\cdot\left(a^2-2a-3\right)-3=a^3-2a^2-3a-2a^2+4a+6-3=a^3-4a^2+a+3$

b)

$$\begin{array}{l}
\left(x^3-2x^2-5\right):\left(x+3\right)=x^2-5x+15 \quad \left(\text{zbytek } -50\right)\\
\underline{-\left(x^3+3x^2\right)}\\
\quad -5x^2-5\\
\quad \underline{-\left(-5x^2-15x\right)}\\
\qquad 15x-5\\
\qquad \underline{-\left(15x+45\right)}\\
\qquad\qquad -50
\end{array}$$

$\left(x+3\right)\cdot\left(x^2-5x+15\right)-50=x^3-5x^2+15x+3x^2-15x+45-50=x^3-2x^2-5$

c)

$$
\begin{array}{l}
\left(6x^3-7x^2+5x-2\right):\left(3x-2\right)=2x^2-x+1\\
\underline{-\left(6x^3-4x^2\right)}\\
\qquad -3x^2+5x-2\\
\quad \underline{-\left(-3x^2+2x\right)}\\
\qquad\qquad 3x-2\\
\qquad\quad \underline{-\left(3x-2\right)}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Zkouška: $\left(3x-2\right)\cdot\left(2x^2-x+1\right)=6x^3-3x^2+3x-4x^2+2x-2=6x^3-7x^2+5x-2$

d)

$$
\begin{array}{l}
\left(4a^3-a+2\right):\left(a-4\right)=4a^2+16a+63 \quad \left(\text{zbytek } 254\right)\\
\underline{-\left(4a^3-16a^2\right)}\\
\qquad 16a^2-a+2\\
\quad \underline{-\left(16a^2-64a\right)}\\
\qquad\qquad 63a+2\\
\qquad\quad \underline{-\left(63a-252\right)}\\
\qquad\qquad\quad 254
\end{array}
$$

Zkouška:
$\left(a-4\right)\cdot\left(4a^2+16a+63\right)+254=4a^3+16a^2+63a-16a^2-64a-252+254=4a^3-a+2$

e)

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4-2x^2+2\right):\left(x^2-1\right)=x^2-1 \quad \left(\text{zbytek } 1\right)\\
\underline{-\left(x^4-x^2\right)}\\
\qquad -x^2+2\\
\quad \underline{-\left(-x^2+1\right)}\\
\qquad\qquad 1
\end{array}
$$

Zkouška: $\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-1\right)+1=x^4-x^2-x^2+1+1=x^4-2x^2+2$

f)

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4-2x^3+5x^2-4x+6\right):\left(x^2+2\right)=x^2-2x+3\\
\underline{-\left(x^4 \qquad +2x^2\right)}\\
\qquad -2x^3+3x^2-4x+6\\
\quad \underline{-\left(2x^3-4x\right)}\\
\qquad\qquad 3x^2+6\\
\qquad\quad \underline{-\left(3x^2+6\right)}\\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Zkouška: $\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2-2x+3\right)=x^4-2x^3+3x^2+2x^2-4x+6=x^4-2x^3+5x^2-4x+6$

g)

$$
\begin{array}{l}
\left(a^3+b^3\right):(a+b)=a^2-ab+b^2 \\
\underline{-\left(a^3+a^2b\right)} \\
\quad -a^2b+b^3 \\
\quad \underline{-\left(-a^2b-ab^2\right)} \\
\qquad ab^2+b^3 \\
\qquad \underline{-\left(ab^2+b^3\right)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Zkouška: $(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$

h)

$$
\begin{array}{l}
\left(b^6-1\right):(b+1)=b^5-b^4+b^3-b^2+b-1 \\
\underline{-\left(b^6+b^5\right)} \\
\quad -b^5-1 \\
\quad \underline{-\left(-b^5-b^4\right)} \\
\qquad b^4-1 \\
\qquad \underline{-\left(b^4+b^3\right)} \\
\qquad\quad -b^3-1 \\
\qquad\quad \underline{-\left(-b^3-b^2\right)} \\
\qquad\qquad b^2-1 \\
\qquad\qquad \underline{-\left(b^2+b\right)} \\
\qquad\qquad\quad -b-1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-b-1)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Zkouška: $(b+1)\cdot\left(b^5-b^4+b^3-b^2+b-1\right)=b^6-b^5+b^4-b^3+b^2-b+b^5-b^4+b^3-b^2+b-1=$
$=b^6-1$

Shrnutí: I dělení mnohočlenů může vyjít se zbytkem.